Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

Klausur zur Lehrveranstaltung
Lineare Optimierung und Erweiterungen (20010)

Bachelor-Klausur (120 Minuten)

10. Februar 2010

Name:... Matrikelnummer:...............................

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst **7 Aufgaben**, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten! Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite! Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte! Bleistifte sowie die Verwendung von roter Tinte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsansatz bzw. den Lösungsweg an! Für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Für das Optimierungssystem

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_0 = & x_1 & + & x_2 & \\
& x_1 & + 0{,}5x_2 & \leqq & 24 \\
& -x_1 & + \quad x_2 & \geqq & 12 \\
& 2x_1 & - \quad x_2 & = & 0 \\
& x_1 & & & \text{unbeschränkt} \\
& & x_2 & \geqq & 0 \\
\end{array}
$$

$x_0 \to$ Min!

soll mit Hilfe der Zwei-Phasen-Simplexmethode zunächst eine erste zulässige und dann eine optimale Basislösung bestimmt werden.

a) Erstellen Sie – zunächst in expliziter Form – das zugehörige künstliche Optimierungssystem, mit dessen Hilfe sich die gesuchte zulässige Lösung grundsätzlich ermitteln lässt!

b) Weisen Sie die Existenz (bzw. Nichtexistenz) einer zulässigen Basislösung durch Anwendung der Simplexmethode nach und geben Sie diese ggf. an!

c) Geben Sie – sofern das möglich ist – eine optimale Lösung des Ausgangssystems sowie den zugehörigen optimalen Zielwert an!

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$x_0 = 2x_1 + 4x_3 + 3x_5$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 4x_3 & & & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 32 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 12 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 14 \\ x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \geqq & 0 \end{array}$$

$x_0 \rightarrow$ Max!

Nach Anwendung des primalen Simplexalgorithmus erhält man folgendes optimales Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	3	2	0	1	0	0	38
0	–1	0	0	–2	0	1	4
0	3	2	0	–1	1	0	10
0	–1	–1	1	1	0	0	2

a) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung bzgl. der rechten Seite des Ausgangssystems durch!

b) Im oben aufgeführten Ausgangssystem soll nun eine neue Variable x_7 eingeführt werden, deren Koeffizientenspalte im Ausgangssystem in Bezug auf die Strukturrestriktionen wie folgt lautet:

$$\boxed{\begin{array}{c} -6x_7 \\ -4x_7 \\ -2x_7 \end{array}}$$

Die Zielfunktionszeile des Ausgangsystems unter Einschluss der neuen Variable lautet dann: $x_0 = 2x_1 + 4x_3 + 3x_5 - 8x_7$. Außerdem gelte $x_7 \geq 0$. Konstruieren Sie für das so erweiterte System wieder eine optimale kanonische Form! Geben Sie – sofern möglich – eine optimale Lösung und den zugehörigen Zielwert an!

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Berechnen Sie für jeden Wert des Parameters Θ ($\Theta \in \mathbb{R}$) eine optimale Lösung für das folgende Optimierungssystem, sofern eine solche existiert:

$$x_0 = (\Theta - 3)x_1 + (1 - 2\Theta)x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqq 3 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 8 \\ x_1, \quad x_2, &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$x_0 = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 1x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & \leqq & 14 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 32 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leqq & 22 \\ x_1, & & & & x_3, & & x_4, & & & \geqq & 0 \\ & & x_2, & & & & & & x_5, & & \text{unbeschränkt} \end{array}$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

a) Formulieren Sie zunächst allgemein den schwachen Dualitätssatz der linearen Optimierung!

b) Konstruieren Sie zu diesem System das zugehörige duale Optimierungssystem!

c) Durch

$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 13 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x^{**} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind zwei Lösungen des primalen Systems und durch

$y^* = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $y^{**} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ zwei Lösungen des dualen Systems gegeben.

Zeigen Sie die Gültigkeit des schwachen Dualitätssatzes für diese Lösungen! Ist eine Lösung bzw. sind mehrere Lösungen optimal bzgl. des jeweiligen Systems?

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_0 & = & 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & \\
 & & 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leqq & 5 \\
 & & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leqq & 8 \\
 & & x_1 & & & & & \leqq & 5 \\
 & & & & x_2 & & & \leqq & 4 \\
 & & & & & & x_3 & \leqq & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geqq & 0
\end{array}
$$

$x_0 \rightarrow$ Max!

Bestimmen Sie für dieses Problem – sofern das möglich ist – mit Hilfe der Upper Bounding-Technique eine optimale Lösung und den zugehörigen Zielwert!

Aufgabe 6 (15 Punkte)

a) Gegeben sei das folgende binäre Optimierungssystem:

$$x_0 = -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 9x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 &\geqq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 &\geqq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 &\leqq 4 \end{aligned}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \in \{0,1\}$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

Überführen Sie das System auf die Ihnen bekannte Normalform für binäre Optimierungssysteme! (Formen Sie das System lediglich auf die Normalform um, die Bestimmung einer Lösung ist <u>nicht</u> gefordert!)

b) Das folgende binäre Optimierungssystem wurde bereits auf die Normalform gebracht:

$$z_0 = 3z_1 + 4z_2 + 6z_3 + 8z_4 + 10z_5$$

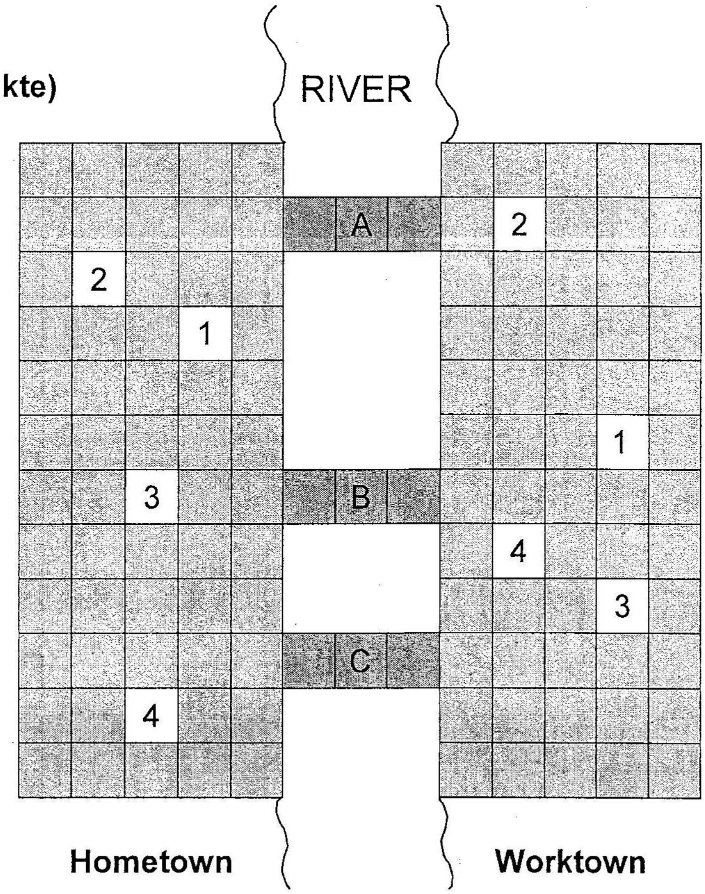
$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 - z_3 + 3z_4 + 2z_5 &\geqq -1 \\ 2z_1 - 5z_2 + 3z_3 - 4z_4 + 3z_5 &\geqq 4 \end{aligned}$$

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4, \quad z_5 \in \{0,1\}$$

$$z_0 \rightarrow \text{Min!}$$

Wenden Sie auf dieses System das BALAS-Verfahren an und bestimmen Sie eine optimale Lösung des Systems, sofern eine solche Lösung existiert! Geben Sie auch den zugehörigen Zielwert an!

Aufgabe 7 (15 Punkte)

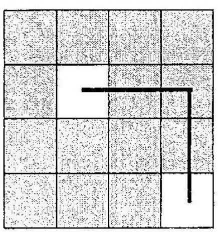


Die vier Bewohner (1, 2, 3, und 4) der Insel Hometown arbeiten auf der Nachbarinsel Worktown. Ihre Wohnhäuser in Hometown sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 gekennzeichnet, ihre Arbeitsplätze in Worktown sind analog bezeichnet (d.h. Bewohner 1 arbeitet am Arbeitsplatz 1, Bewohner 2 am Arbeitsplatz 2, etc.). Bisher benutzen die Bewohner eine Fähre, um zur Arbeit zu gelangen. Zwischen den beiden Inseln sollen nun Brücken gebaut werden, damit die Bewohner zukünftig einfacher zur Arbeit kommen. Die Stadt hat aber nur Geld, um zwei Brücken zu finanzieren. Für diese zwei Brücken stehen wiederum drei alternative Standorte (A, B und C; siehe Skizze) zur Verfügung.

Stellen Sie ein binäres Optimierungsmodell auf, mit dessen Hilfe die zwei Brückenstandorte bestimmt werden können, welche die Länge der von den Bewohnern insgesamt zurückzulegenden Fahrtstrecke (Gesamtfahrtstrecke) minimieren!

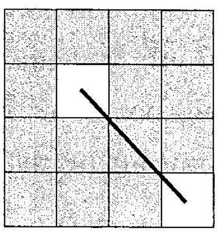
<u>Hinweis:</u> Die Einwohner nehmen immer den kürzesten Weg zur Arbeit und können sich nur rechtwinklig bewegen (diagonale Bewegungen sind nicht möglich). Jedes Quadrat repräsentiert dabei eine Fläche von1km x 1km. Beachten Sie die folgenden Beispiele:

a)



Die Länge der Strecke beträgt vier Längeneinheiten

b)



Dieser Weg ist nicht erlaubt!