Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

Klausur zur Lehrveranstaltung

Lineare Optimierung und Erweiterungen (20010)

7. Februar 2013

Name:.. Matrikelnummer:...............................

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Note
Mögliche Punkte	20	10	17	21	14	18	100	
Erreichte Punkte								

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst **6 Aufgaben**, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten! Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite! Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte! Bleistifte sowie die Verwendung von roter Tinte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsansatz bzw. den Lösungsweg an! Für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_0 & = & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \rightarrow & \text{Max!} \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 14 \\
 & & x_1 & & & & & \leq & 5 \\
 & & & & & & x_3 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & & & & \text{unbeschränkt}
\end{array}
$$

Bestimmen Sie für dieses Problem – sofern das möglich ist – mit Hilfe der Upper-Bounding-Technique eine optimale Lösung und den zugehörigen Zielwert!

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x_0 & = & 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \text{Max!} \\
 & & x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 20 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & -5 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Wenden Sie die parametrische primal-duale Simplexmethode auf das gegebene Optimierungssystem an und bestimmen Sie – sofern das möglich ist – eine optimale Lösung für dieses System!

Aufgabe 3 (17 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcccccccl}
x_0 = & 2x_1 & & + 4x_3 & & & + 3x_6 & \rightarrow & \text{Max!} \\
& 2x_1 & + x_2 & + 4x_3 & & & + 2x_6 & = & 12 \\
& x_1 & & + 2x_3 & & + x_5 & + x_6 & = & 16 \\
& 3x_1 & & + 2x_3 & + x_4 & & + 2x_6 & = & 10 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Nach Anwendung des primalen Simplexalgorithmus erhält man das folgende optimale Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	16
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	10
0	2	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	1	4

a) Wie groß sind die Opportunitätskosten der ersten Restriktion, falls x_2 als Schlupfvariable für die erste Restriktion eingeführt wurde? Um wie viele Einheiten muss die Restriktion dabei gelockert werden?

b) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielkoeffizienten von x_1 und x_3 durch!

c) Nehmen Sie an, im Ausgangssystem würde der Vektor **b** der rechten Seiten abgeändert in:

$$\mathbf{b}^{neu} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Außerdem sei $b_0=0$.

Geben Sie – sofern das möglich ist – für das so veränderte System wieder eine optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an!

Aufgabe 4 (21 Punkte)

a) Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass das Optimierungssystem (D) das zum Optimierungsproblem (P) zugehörige duale System ist.

$$(P) \qquad x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{Max!}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

$$(D) \qquad y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \text{Min!}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Zeigen Sie, dass das Optimierungssystem (D') das zum Optimierungsproblem (P') zugehörige duale System ist! Nutzen Sie dafür die oben dargestellte Dualitätsbeziehung der Optimierungssysteme (P) und (D)!

$$(P') \qquad x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{Max!}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \quad \text{unbeschränkt}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

$$(D') \qquad y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \text{Min!}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

b) Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_0 & = & 2x_1 & - & 5x_2 & & & + & x_4 & - & 2x_5 & \rightarrow & \text{Max!} \\
& & 4x_1 & & & - & 2x_3 & & & + & 4x_5 & = & 20 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 10 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & & = & 16 \\
& & & & x_2, & & x_3, & & & & x_5 & \geq & 0 \\
& & x_1, & & & & & & x_4, & & & & \text{unbeschränkt}
\end{array}
$$

Konstruieren Sie zu dem gegebenen System das zugehörige duale Optimierungssystem!

c) Formulieren Sie allgemein den schwachen Dualitätssatz der linearen Optimierung!

d) Betrachten Sie erneut das gegebene System aus Aufgabenteil b). $x^* = (0,0,0,4,5)$ löst dieses System. Existiert für das zugehörige duale Optimierungssystem eine zulässige Lösung, deren Zielfunktionswert kleiner als -10 ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (14 Punkte)

a) Gegeben sei das folgende binäre Optimierungssystem:

$$x_0 = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 9x_5 \rightarrow \text{Max!}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 &\geq -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &\geq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Überführen Sie das System auf die Ihnen bekannte Normalform für binäre Optimierungssysteme! (Formen Sie das System lediglich auf die Normalform um! Die Bestimmung einer Lösung ist nicht gefordert!)

b) Das folgende binäre Optimierungssystem wurde bereits auf die Normalform gebracht:

$$z_0 = 2z_1 + 3z_2 + 5z_3 + 6z_4 + 8z_5 \rightarrow \text{Min!}$$

$$\begin{aligned} z_1 - 3z_2 - z_3 + 4z_4 + 3z_5 &\geq -1 \\ -2z_1 - 4z_2 + 3z_3 + z_4 + 3z_5 &\geq 4 \\ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Wenden Sie auf dieses System das BALAS-Verfahren an und bestimmen Sie eine optimale Lösung des Systems, sofern eine solche Lösung existiert! Geben Sie auch den zugehörigen Zielwert an!

Aufgabe 6 (18 Punkte)

Gegeben sei das folgende ganzzahlige lineare Optimierungssystem:

$$x_0 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leqq 17 \\ x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\ x_1, \quad x_2 &\geqq 0 \text{ und ganzzahlig} \end{aligned}$$

a) Nach Anwendung des primalen Simplexalgorithmus ergibt sich das folgende optimale Tableau für das in Bezug auf die Ganzzahligkeitsrestriktionen relaxierte Problem. Bestimmen Sie zwei Schnittrestriktionen, die von allen zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems erfüllt, aber von der dargestellten optimalen Lösung des relaxierten Problems verletzt werden.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RS
1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{17}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{17}{4}$
0	0	1	0	1	0	5
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$

b) Stellen Sie zunächst das in Bezug auf die Ganzzahligkeitsrestriktionen relaxierte Problem graphisch da. Leiten Sie dann für die unter a) entwickelten Schnittrestriktionen die entsprechenden Restriktionen in der x_1-x_2-Ebene her und zeichnen Sie diese in die graphische Darstellung ein!

c) Bestimmen Sie nun anhand der graphischen Darstellung **alle** optimalen Lösungen des entstandenen relaxierten Problems. Sind diese Lösungen auch für das ganzzahlige Ausgangsproblem optimale Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie **alle** optimalen Lösungen für das Ausgangsproblem an!