Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

Übungsklausur zur Lehrveranstaltung
Lineare Optimierung und Erweiterungen
23. Februar 2004

Name: .... **Vorname:** .... **Matrikelnummer:** ....

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst 4 Seiten (einschließlich des Deckblatts).
4. Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (lt. Aushang des Prüfungsausschusses), Wörterbuch.

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt
Punkte erreichbar	10	15	10	15	50

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende parametrische Optimierungsproblem:

$$x_0 = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leqq 5 \\ x_2 &\leqq 8 \\ x_1 + x_2 &\geqq 8+\lambda \\ x_1, \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$x_0 \to \text{Min!}$$

Geben Sie – soweit das möglich ist – für jeden Wert des Parameters λ ($\lambda \in \mathrm{IR}$) eine optimale Lösung an!

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende, symmetrische Dualpaar (POS, DOS) linearer Optimierungssysteme:

POS

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Max!}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqq b_i\,,\ i=1, \ldots, m$$

$$x_j \geqq 0\ ,\ j=1, \ldots, n$$

DOS

$$y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \text{Min!}$$

$$y_i \geqq 0\ ,\ i=1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \geqq c_j,\ j=1, \ldots, n$$

a) Formulieren Sie den **Schwachen Dualitätssatz** linearer Optimierungssysteme zunächst allgemein!

b) Beweisen Sie den schwachen Dualitätssatz für das vorgegebene Dualpaar!

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$x_0 = x_2 + 4x_3 + 2x_5 \rightarrow \text{Max!}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_6 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 4 \\ + 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= 6 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Nach Anwendung des primalen Simplexalgorithmus erhält man folgendes optimales Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	1	0	0	½	½	0	7
0	-1	0	0	½	½	1	1
0	1	1	0	-½	-½	0	1
0	0	0	1	¼	¾	0	1,5

a) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung bzgl. der rechten Seiten durch!

b) Bestimmen Sie, sofern das möglich ist, eine optimale Lösung des Systems sowie den zugehörigen Zielwert, wenn im Ausgangssystem die Zielfunktion abgeändert wird in:

$$x_0 = x_2 + 2\,x_3 + x_5 + x_6 - 4 \rightarrow \text{Max!}$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende binäre Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rrrrrrll}
x_0 = & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & -7x_4 & -11x_5 & & \\
 & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -4x_4 & -2x_5 & \leq & 1 \\
 & 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & -5x_4 & +5x_5 & \geq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

Bestimmen Sie für dieses Problem - sofern das möglich ist - mit Hilfe des additiven Verfahrens von BALAS eine optimale Lösung und den zugehörigen Zielwert!