Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

ManSci

Klausur zur Lehrveranstaltung

Lineare Optimierung und Erweiterungen (1760)

09. Februar 2005

Name: .... **Vorname:** .... **Matrikelnummer:** ....

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst 4 Aufgaben, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte. Korrekturstifte sowie Rotstifte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsweg an, für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

Aufgabe 1 (15 Punkte):

Für das Optimierungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x_0 = & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \rightarrow \text{Max!} \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leqq 3 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geqq -1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & = 3 \\
 & x_1 & & & & & \text{unbeschränkt} \\
 & & & x_2, & & x_3 & \geqq 0
\end{array}
$$

soll mit Hilfe der Zwei-Phasen-Simplexmethode zunächst eine erste zulässige und dann eine optimale Basislösung bestimmt werden.

a) Erstellen Sie – zunächst in expliziter Form – das zugehörige künstliche Optimierungssystem, mit dessen Hilfe sich die gesuchte zulässige Lösung grundsätzlich ermitteln lässt!

b) Weisen Sie die Existenz (bzw. Nichtexistenz) einer zulässigen Basislösung durch Anwendung der Simplexmethode nach und geben Sie diese ggf. an!

c) Bestimmen Sie – sofern das möglich ist – eine optimale Lösung des Ausgangssystems! Geben Sie auch den zugehörigen optimalen Zielwert an!

Aufgabe 2 (15 Punkte):

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_0 = & & 3x_2 & & & + & x_4 & & & + & 2x_6 & \rightarrow & \text{Max!} \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & + & 2x_6 & = & 6 \\
 & & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 6 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & 4x_4 & & & + & 2x_6 & = & 8 \\
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Nach Anwendung des primalen Simplexalgorithmus erhält man folgendes optimales Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	9
0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
0	1	0	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	5

a) Führen Sie jeweils eine Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung bzgl. des Zielfunktionskoeffizienten von x_1 und x_4 durch!

b) Geben Sie – sofern das möglich ist – eine optimale Lösung des Systems sowie den zugehörigen Zielwert für den Fall an, dass im Ausgangsystem der Vektor **b** der rechten Seiten des Restriktionssystems abgeändert wird in: $\mathbf{b}^+ = (2;\ 3;\ 1{,}5)$! Außerdem sei $b_0 = -5$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende ganzzahlig-lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Max!} \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ und ganzzahlig.}
\end{aligned}
$$

Nach dem Einführen von Schlupfvariablen s_1 und s_2 (in natürlicher Reihenfolge) ergibt sich als optimales Simplextableau für das in Bezug auf die Ganzzahligkeitsrestriktionen relaxierte Problem:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	$2/3$	$8/3$	$38/3$
0	1	0	$2/3$	$-1/3$	$2/3$
0	0	1	$-1/3$	$2/3$	$8/3$

a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung des ganzzahligen Problems mit Hilfe des GOMORY-I-Verfahrens!

b) Stellen Sie das in Bezug auf die Ganzzahligkeitsrestriktionen relaxierte Problem graphisch dar und kennzeichnen Sie dessen optimale Lösung. Leiten Sie dann für den unter a) entwickelten Schnitt bzw. die unter a) entwickelten Schnitte die entsprechende Darstellung in der x_1-x_2-Ebene her und zeichnen Sie diesen Schnitt bzw. diese Schnitte in die graphische Darstellung ein!

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Formulieren Sie den **Starken Dualitätssatz** linearer Optimierungssysteme allgemein!

b) Zeigen Sie ohne Verwendung des Starken Dualitätssatzes, dass zu dem folgenden primalen Optimierungssystem (POS)

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{Max!}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \quad , i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqq 0 \quad , j = 1, \ldots, n$$

das zugehörige duale Optimierungssystem mindestens eine zulässige Lösung besitzt, wenn das POS optimal lösbar ist.