Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

Klausur zur Lehrveranstaltung
Lineare Optimierung und Erweiterungen (1760)
06. Februar 2006

Name: .... **Vorname:** .... **Matrikelnummer:** ....

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Beginn der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst **5 Aufgaben**, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte. Bleistifte sowie die Verwendung von roter Tinte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsansatz bzw. den Lösungsweg an, für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

Aufgabe 1 (9 Punkte):

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungssystem:

$$x_0 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 35 \\ 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 &\leqq -50 \\ 4x_1 - 2x_3 &= 10 \\ x_1, \quad x_3 &\geqq 0 \\ x_2 \quad &\text{unbeschränkt} \end{aligned}$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

a) Erstellen Sie das zugehörige künstliche Optimierungssystem, mit dessen Hilfe sich die gesuchte Lösung grundsätzlich ermitteln lässt!

b) Geben Sie eine erste zulässige kanonische Form **des künstlichen Optimierungsystems** in Tableau-Darstellung an!

Der Nachweis der Existenz bzw. Nichtexistenz einer zulässigen Basislösung ist **nicht** gefordert!

Aufgabe 2 (12 Punkte):

Für ein lineares Optimierungssystem des Typs

$$x_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + b_0 \rightarrow \text{Max!}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

ergibt sich nach dem Einführen von Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3 (in natürlicher Reihenfolge) und Anwendung des primalen Simplexalgorithmus das folgende Simplextableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RS
1	0	0	7	5	1	0	2	122
0	1	0	0	1	1	0	0	6
0	0	0	-9	5	2	1	-2	8
0	0	1	4	-1	-1	0	1	2

a) Nehmen Sie an, im Ausgangssystem würde der Vektor **b** der rechten Seiten abgeändert in:

$$\mathbf{b}^{++} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Außerdem sei $b_0 = 100$.

Geben Sie - sofern das möglich ist - für das so veränderte System wieder eine optimale Lösung sowie den zugehörigen optimalen Zielwert an!

b) Bestimmen Sie - sofern möglich - eine optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielwert für:

$$\mathbf{b}^{+} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und $b_0 = 100$!

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Berechnen Sie für jeden Wert des Parameters Θ ($\Theta \in IR$) eine optimale Lösung für das folgende Optimierungssystem, sofern eine solche existiert:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x_0 & = & x_1 & + & (1+\Theta)x_2 & & \\
 & & x_1 & & & \leqq & 3 \\
 & & & & x_2 & \leqq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leqq & 12 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geqq & 0
\end{array}
$$

$$x_0 \to \text{Max!}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben ist ein lineares Optimierungssystem des Typs

$$x_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + b_0 \to \text{Max!}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Was können sie allgemein über die Unlösbarkeit, Lösbarkeit und optimale Lösbarkeit eines solchen Systems aussagen? Verdeutlichen Sie Ihre Ausführungen mit Hilfe eines Baumdiagrammes.

Aufgabe 5 (10 Punkte):

a) Formulieren Sie den **Satz vom komplementären Schlupf** linearer Optimierungssysteme allgemein!

b) $\begin{pmatrix} 52 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ sei eine optimale Lösung des folgenden linearen Optimierungssystems:

$$\begin{aligned} x_0 &= 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqq 120 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqq 100 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqq 0 \\ x_0 &\rightarrow \text{Max!} \end{aligned}$$

Erstellen Sie das zugehörige duale Optimierungssystem!

c) Bestimmen Sie - unter Anwendung des Satzes vom komplementären Schlupf - eine optimale Lösung und den zugehörigen optimalen Zielwert des unter b) bestimmten dualen Systems! Bestätigen Sie die Richtigkeit Ihrer Rechnungen durch eine Probe!