gesc...

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre VIII
- Management Science -
Prof. Dr. Gerhard Wäscher

Klausur zur Lehrveranstaltung
Lineare Optimierung und Erweiterungen (1760)

08. Februar 2008

Name:………………………………………….. Matrikelnummer:…………………………..

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt	Note
Mögliche Punkte	15	10	10	15	50	
Erreichte Punkte						

Allgemeine Hinweise:

1. Schreiben Sie nach Ausfüllen dieses Deckblattes nochmals auf alle Ihnen ausgehändigten Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!
2. Lassen Sie bitte zur Erleichterung der Korrektur einen genügend breiten, unbeschrifteten Rand (mindestens 4 cm)!
3. Kontrollieren Sie vor Begin der Bearbeitung der Klausur die Vollständigkeit des Aufgabentextes! Der Aufgabentext umfasst **4 Aufgaben**, von denen alle zu bearbeiten sind. Das Lösen der Heftklammern ist nicht gestattet und wird als Täuschungsversuch geahndet.
4. Schreiben Sie leserlich und nummerieren Sie die verwendeten Seiten! Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite! Verwenden Sie nur Schreibgeräte mit dokumentenechter Tinte! Bleistifte sowie die Verwendung von roter Tinte sind nicht zugelassen.
5. Geben Sie zu jeder Aufgabe den Lösungsansatz bzw. den Lösungsweg an! Für die isolierte Präsentation richtiger Endergebnisse werden keine Punkte vergeben.
6. Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgeräte, nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Kommunikations- oder Textverarbeitungsfunktion, Wörterbücher.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungssystem:

$$x_0 = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\leqq 44 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geqq 22 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

x_1 unbeschränkt

$x_2 \geqq 0$

$x_0 \to$ Min!

a) Stellen Sie zunächst das dazugehörige künstliche Optimierungssystem explizit auf!

b) Bestimmen Sie mit der Zwei-Phasen-Simplexmethode eine optimale Lösung (sofern eine solche Lösung existiert) und den zugehörigen Zielwert!

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für ein lineares Optimierungssystem des Typs

$$x_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + b_0 \rightarrow \text{Max!}, \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

ergibt sich nach dem Einführen von Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3 (in natürlicher Reihenfolge) und Anwendung des primalen Simplexalgorithmus das folgende Simplextableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RS
1	0	0	7	5	1	0	2	22
0	1	0	0	1	1	0	0	6
0	0	0	-9	5	2	1	-2	8
0	0	1	4	-1	-1	0	1	2

a) Bestimmen Sie den Vektor **b** der rechten Seiten des Ausgangssystems!

b) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse der optimalen Lösung bzgl. der rechten Seite der dritten Restriktion (b_3) des Ausgangssystems durch!
Konnten Sie den Vektor **b** in Aufgabenteil a) nicht bestimmen, so rechnen Sie mit dem im Folgenden aufgeführten alternativen Vektor $\mathbf{b}^{\text{alternativ}}$ weiter:

$$\mathbf{b}^{\text{alternativ}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Der Vektor $\mathbf{b}^{\text{alternativ}}$ ist dabei <u>nicht</u> mit der korrekten Lösung aus a) identisch.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_0 & = & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 16x_3 & + & 8x_4 & & \\
 & & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & \leq & 16 \\
 & & 1x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 1x_4 & \leq & 22 \\
 & & 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & x_4 & & \text{unbeschränkt}
\end{array}
$$

$$x_0 \rightarrow \text{Max!}$$

a) Formulieren Sie zunächst allgemein den Schwachen Dualitätssatz linearer Optimierungsprobleme!

b) Konstruieren Sie zu diesem System das zugehörige duale Optimierungssystem!

c) Durch

$$x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und } x^{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind zwei Lösungen des primalen Systems und durch

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \qquad \text{und } y^{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen des dualen Systems gegeben.

Zeigen Sie die Gültigkeit des schwachen Dualitätssatzes für diese Lösungen!

Ist eine Lösung bzw. sind mehrere Lösungen optimal bzgl. des jeweiligen Systems?

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende binäre Optimierungssystem:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -6y_1 - 8y_2 + 4y_3 \\
& -y_1 - 3y_2 + 2y_3 \leqq -1 \\
& 2y_1 + 5y_2 - 6y_3 \geqq -2 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geqq 1 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \in \{0,1\} \\
y_0 &\to \text{Max!}
\end{aligned}
$$

a) Für das Problem soll mit Hilfe des additiven Verfahrens von BALAS eine optimale Lösung bestimmt werden. Überführen Sie deshalb das System auf die Ihnen bekannte Normalform:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + b_0 , \qquad c_j \geqq 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqq b_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m;$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n;$$

$$x_0 \to \text{Min!}$$

b) Wenden Sie auf das umgeformte System das BALAS-Verfahren an und bestimmen Sie eine optimale Lösung des umgeformten Systems! Geben Sie auch den zugehörigen Zielwert an!

c) Geben Sie eine optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielwert des Ausgangssystems an!